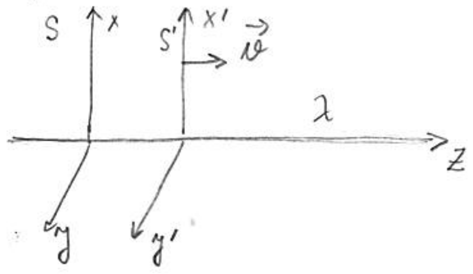
Коваријантна формулација електродинамике

W/4) 1. Бесконачно дуга права је наелектрисана линијском густином наелектрисања λ у систему у коме мирује. Права се креће брзином $\vec{v}=\text{const}$ дуж своје осе. На растојању l од праве налази се тачкасто наелектрисање q које се креће паралелно са правом истом брзином. Одредити силу која делује на наелектрисање q и струју у систему везаном за праву као и у лаборат. сист.



$A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$ – четвороректор потенцијала

$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ $\quad \Lambda^\mu{}_\nu$ – матрица Лоренцове трансформације

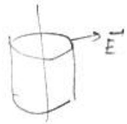
$\Lambda^\mu{}_\nu$ не мења норму вектора $\quad x'^2 = x^2 \;;\; x' = \Lambda x \quad x^2 = x^T g x$

$$x'^2 = x'^T g x' = (\Lambda x)^T g \Lambda x = x^T \Lambda^T g \Lambda x = x^T g x \Rightarrow \boxed{\Lambda^T g \Lambda = g}$$

Λ – ротације + бустови $\quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ буст дуж x-осе $\quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cos\varphi & \sin\varphi & \\ & -\sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ ротација око z-осе

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \to \vec{E}' = -\operatorname{grad}'\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} = \ldots \;;\quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \to \vec{B}' = \operatorname{rot}'\vec{A}'$$

за бустове: $\boxed{\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel, \quad \vec{E}'_\perp = \frac{\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel, \quad \vec{B}'_\perp = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$



у систему S' λ мирује: $\rho' = \lambda\,\delta(x')\,\delta(y')$; $\boxed{j'^\mu(x') = \rho' c\, \delta^\mu_0}$ $\qquad E'\cdot 2 r'_c \pi \cancel{l} = \lambda \cancel{l} \frac{1}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{E}'_\perp = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_c}\vec{e}_{r_c}} \qquad \boxed{\vec{B} = 0}$$

у систему S: буст дуж z-осе за $-\vec{v}$ $\qquad \vec{E}_\perp = \frac{\vec{E}'_\perp - \vec{v}\times\overset{0}{\vec{B}'_\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\vec{E}'_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \boxed{\frac{\lambda \vec{e}_{r_c}}{2\pi\varepsilon_0 r_c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$; $\vec{E}_\parallel = 0$

$$\vec{B}_\perp = \frac{\overset{0}{\vec{B}'_\perp} + \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}'_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(v\vec{e}_z \times \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r'_c}\vec{e}_{r_c}\right) = \frac{\lambda v \vec{e}_\varphi}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r_c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \boxed{\frac{\mu_0 \lambda v \vec{e}_\varphi}{2\pi r_c\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

S': $\vec{F}' = q\vec{E}' = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 l}\vec{e}_r$ $\quad$; S: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = q\frac{\lambda \vec{e}_{r_c}}{2\pi\varepsilon_0 l\sqrt{1-v^2/c^2}} + q v\vec{e}_z \times \frac{\overset{\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}}{\mu_0}\lambda v \vec{e}_\varphi}{2\pi r_c\sqrt{1-v^2/c^2}}$

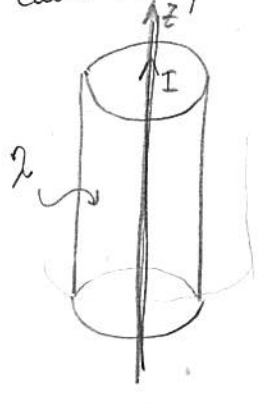
$$\vec{F} = \frac{q\lambda \vec{e}_{r_c}}{2\pi\varepsilon_0 l\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \boxed{\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 l}\sqrt{1-v^2/c^2}\;\vec{e}_{r_c}}$$

$$j^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu j'^\nu = \Lambda^\mu{}_0 \rho' c = c\lambda\,\delta(x)\,\delta(y)\,\Lambda^\mu{}_0 \qquad \Lambda^\mu{}_\nu(-v\vec{e}_z) = \begin{bmatrix} \gamma & & & \beta\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \beta\gamma & & & \gamma \end{bmatrix} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$j^0 = c\gamma\lambda\,\delta(x)\,\delta(y) = \rho c \;;\quad j^3 = \cancel{c}\lambda\gamma\frac{v}{\cancel{c}}\,\delta(x)\,\delta(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\lambda\,\delta(x)\,\delta(y)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;;\quad j^3 = \frac{\lambda v\,\delta(x)\,\delta(y)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Бесконачни цилиндар је равномерно наелектрисан наелектрисањем λ по јединици дужине. Дуж осе цилиндра тече струја I. У целом простору је $\varepsilon_r = \mu_r = 1$. Наћи систем референце у коме постоји само електрично или само магнетно поље (ван цилиндра).



У лабораторијском систему:

$$E \cdot 2r_c\pi \cancel{l} = \lambda \cancel{l} \frac{1}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_c}\vec{e}_{r_c}}$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I \qquad B \cdot 2r_c\pi = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r_c\pi}\vec{e}_\varphi}$$

1° $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$; $\vec{E}'_{\perp} = \dfrac{\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\Rightarrow$ S' буде дуж z-осе јер $\underline{E_z = 0}$.

Систем са $\vec{E}' = 0$
$$\vec{E}'_\perp = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_c}\vec{e}_{r_c} + v\vec{e}_z \times \frac{\mu_0 I}{2r_c\pi}\vec{e}_\varphi\right)\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_c}\vec{e}_{r_c}\left(1 - \frac{vI}{\lambda c^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{\lambda}{I}c^2\vec{e}_z} < c\vec{e}_z \Rightarrow \boxed{\frac{I}{\lambda} > c}$ услов да $\exists$ систем у коме нема $\vec{E}$!

2° $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$; $\vec{B}'_\perp = \dfrac{\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\Rightarrow$ S' буде дуж z-осе јер $B_z = 0$.

Систем са $\vec{B}' = 0$
$$\vec{B}'_\perp = \left(\frac{\mu_0 I}{2r_c\pi}\vec{e}_\varphi - \frac{1}{c^2}v\vec{e}_z \times \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_c}\vec{e}_{r_c}\right)\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\mu_0 I}{2r_c\pi}\vec{e}_\varphi\left(1 - \frac{v\lambda}{I}\right) = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{I}{\lambda}\vec{e}_z} < c\vec{e}_z \Rightarrow \boxed{\frac{I}{\lambda} < c}$ услов да $\exists$ систем у коме нема $\vec{B}$.

Релативистичка честица наелектрисања q и масе m се креће у паралелним хомогеним пољима $\vec{E} = E\hat{e}_z$ и $\vec{B} = B\vec{e}_z$. У тренутку $t=0$ честица је била у координатном почетку и имала импулс $\vec{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$. Наћи x, y, z и t у функцији сопственог времена.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = qE\vec{e}_z + q(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z)\times B\vec{e}_z = qE\vec{e}_z + q(v_y\vec{e}_x - v_x\vec{e}_y)B \quad ; \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v} = q\vec{E}\vec{v} = qEv_z \quad ; \quad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

интегралимо по t ове 4 јне:

$$\frac{dp_x}{dt} = qB\frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{p_x = qBy + p_{0x}}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -qB\frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{p_y = -qBx}$$

$$\frac{dp_z}{dt} = qE \Rightarrow \boxed{p_z = qEt + p_{0z}}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = qE\frac{dz}{dt} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = qEz + \varepsilon_0}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2\frac{dt}{d\tau}$$

$$\boxed{m\frac{dx}{d\tau} = qBy + p_{0x} \qquad m\frac{dy}{d\tau} = -qBx}$$

$$\boxed{m\frac{dz}{d\tau} = qEt + p_{0z} \qquad mc^2\frac{dt}{d\tau} = qEz + \varepsilon_0}$$

$/\frac{d}{d\tau}$ $\quad m\frac{d^2x}{d\tau^2} = qB\frac{dy}{d\tau} = qB\left(-\frac{qB}{m}\right)x$

$$\boxed{\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x = 0} \quad (*)$$

$/\frac{d}{d\tau}$ $\quad m\frac{d^2z}{d\tau^2} = qE\frac{dt}{d\tau} = qE\left(\frac{qE}{mc^2}z + \frac{\varepsilon_0}{mc^2}\right)$

$$\boxed{\frac{d^2z}{d\tau^2} - \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 z = \frac{qE\varepsilon_0}{m^2c^2}} \quad (**)$$

(*): $\quad x(\tau) = C_1\sin\omega\tau + C_2\cos\omega\tau$, $\quad \omega = \frac{qB}{m}$

$x(\tau=0) = \boxed{0 = C_2}$; $\quad \frac{dx}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = \frac{p_{0x}}{m} = C_1\omega \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{p_{0x}}{m\omega}}$

$$\boxed{x(\tau) = \frac{p_{0x}}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right)} \qquad y(\tau) = \frac{m\frac{dx}{d\tau} - p_{0x}}{qB} = \frac{\cancel{m}}{qB}\cdot\frac{p_{0x}}{\cancel{qB}}\frac{\cancel{qB}}{\cancel{m}}\cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right) - \frac{p_{0x}}{qB}$$

$$\boxed{y(\tau) = \frac{p_{0x}}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right) - 1\right)}$$

(**) $z_h = C_3\, sh(\alpha\tau) + C_4\, ch(\alpha\tau)$; $z_p = C_5 \quad -\left(\frac{2E}{mc}\right)^2 C_5 = \frac{2E\mathcal{E}_0}{m^2c^2} \Rightarrow C_5 = -\frac{\mathcal{E}_0}{2E}$; $\boxed{\alpha = \frac{2E}{mc}}$

$$z(\tau) = C_3\, sh(\alpha\tau) + C_4\, ch(\alpha\tau) - \frac{\mathcal{E}_0}{2E} \quad ; \quad z(\tau=0) = C_4 - \frac{\mathcal{E}_0}{2E} = 0 \quad \boxed{C_4 = \frac{\mathcal{E}_0}{2E}}$$

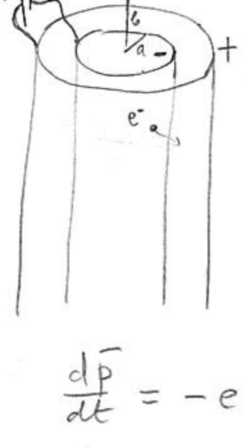
$$m\frac{dz}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = p_{0z} = mC_3\alpha\, \underbrace{ch\,\alpha\tau\big|_{\tau=0}}_{1} + mC_4\alpha\, \underbrace{sh\,\alpha\tau\big|_{\tau=0}}_{0} = mC_3\alpha = \cancel{m}C_3\frac{2E}{\cancel{m}c} \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{p_{0z}c}{2E}}$$

$$\boxed{z(\tau) = \frac{p_{0z}c}{2E}\, sh\left(\frac{2E}{mc}\tau\right) + \frac{\mathcal{E}_0}{2E}\left(ch\left(\frac{2E}{mc}\tau\right) - 1\right)}$$

$$t(\tau) = \frac{m\frac{dz}{dt} - p_{0z}}{2E} = \frac{m}{2E}\left(\frac{p_{0z}\cancel{c}}{\cancel{2E}}\frac{\cancel{2E}}{m\cancel{c}}ch\left(\frac{2E}{mc}\tau\right) + \frac{\mathcal{E}_0}{\cancel{2E}}\frac{\cancel{2E}}{mc}sh\left(\frac{2E}{mc}\tau\right)\right) - \frac{p_{0z}}{2E}$$

$$\boxed{t(\tau) = \frac{p_{0z}}{2E}\left(ch\left(\frac{2E}{mc}\tau\right) - 1\right) + \frac{\mathcal{E}_0}{mc}\, sh\left(\frac{2E}{mc}\tau\right)} \quad ; \quad \mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + (p_{0x}^2 + p_{0z}^2)c^2}$$

(**) Између облога цилиндричног кондензатора полупречника a и b ($a<b$) постоји константна разлика потенцијала V. У простору између облога постоји аксијално симетрично магнетно поље паралелно оси кондензатора $\vec{B} = B(r_c)\vec{e}_z$. Са унутрашње облоге се емитује електрон без почетне брзине. Наћи граничну вриједност флукса магнетног поља при коме електрони престају да стижу на аноду.



$$\vec{E} = E(r_c)\vec{e}_{r_c} = -\frac{d\phi}{dr_c}\vec{e}_{r_c} \; ; \; \boxed{\phi(b) - \phi(a) = V} \; ; \; \vec{B} = B(r_c)\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B} = -e\frac{d\phi}{dr_c}\vec{e}_{r_c} + e\vec{v}\times B(r_c)\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = r_c\vec{e}_{r_c} + z\vec{e}_z \; ; \; \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}_c\vec{e}_{r_c} + r_c\frac{d}{dt}(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y)\dot{\varphi} + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}_c\vec{e}_{r_c} + r_c\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \; ; \; \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}_c\vec{e}_{r_c} + (2\dot{r}_c\dot{\varphi} + r_c\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi - r_c\dot{\varphi}^2\vec{e}_{r_c} + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\frac{d\phi}{dr_c}\vec{e}_{r_c} + e(\dot{r}_c\vec{e}_{r_c} + r_c\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\underbrace{\vec{e}_z) \times B(r_c)\vec{e}_z}_{0} = -e\frac{d\phi}{dr_c}\vec{e}_{r_c} - e\dot{r}_c B\vec{e}_\varphi + er_c\dot{\varphi}B\vec{e}_{r_c}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = (e\vec{E} + e\underbrace{\vec{v}\times\vec{B})\vec{v}}_{0} = -e\frac{d\phi}{dr_c}\cdot\dot{r}_c = -e\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow d\mathcal{E} = -e\,d\Phi \quad \Big/ \int_a^b$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(b) - \mathcal{E}(a) = -e(\phi(b) - \phi(a)) = -eV}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m\vec{v} \; ; \; \dot{\vec{p}} = \dot{\gamma}m\vec{v} + \gamma m\dot{\vec{v}} = \dot{\gamma}m(\dot{r}_c\vec{e}_{r_c} + r_c\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z) + \gamma m\left((\ddot{r}_c - r_c\dot{\varphi}^2)\vec{e}_{r_c} + (2\dot{r}_c\dot{\varphi} + r_c\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z\right)$$

пројектујемо дин. јну $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ на r_c, φ и z осе:

$$r_c: \; m(\dot{\gamma}\dot{r}_c + \gamma(\ddot{r}_c - r_c\dot{\varphi}^2)) = -e\frac{d\phi}{dr_c} + er_cB(r_c)\dot{\varphi}$$

$$\varphi: \; m(\dot{\gamma}r_c\dot{\varphi} + \gamma(2\dot{r}_c\dot{\varphi} + r_c\ddot{\varphi})) = -eB(r_c)\dot{r}_c \quad /\cdot r_c \Rightarrow m\dot{\gamma}r_c^2\dot{\varphi} + m\gamma\frac{d}{dt}(r_c^2\dot{\varphi}) = -er_cB(r_c)\dot{r}_c$$

$$z: \; m(\dot{\gamma}\dot{z} + \gamma\ddot{z}) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{z}) = 0} \; (*) \qquad \Rightarrow \boxed{m\frac{d}{dt}(\gamma r_c^2\dot{\varphi}) = -er_cB(r_c)\frac{dr_c}{dt}} \; (**)$$

из (*) $\Rightarrow m\gamma\dot{z} = const. = 0$ јер за $r=a$ $\dot{z} = 0$ $\Rightarrow \boxed{z = const.}$ кретање електрона је у равни паралелној са xy равни.

$$(**) \; d\left(\frac{mr_c^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = -er_cB(r_c)dr_c \quad \Big/ \int_a^b$$

$$\frac{mb^2\dot{\varphi}(b)}{\sqrt{1 - v^2(b)/c^2}} - \frac{ma^2\overset{0}{\dot{\varphi}(a)}}{\sqrt{1 - \underset{0}{v^2(a)}/c^2}} = -e\int_a^b r_cB(r_c)dr_c = -\frac{e}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^b \vec{B}(r_c)\cdot d\vec{S} = -\frac{e}{2\pi}\Phi_B$$ флукс магнетног поља

Услов да електрони престају да стижу на аноду је да $\vec{v}(b) = b\dot{\varphi}(b)\vec{e}_\varphi$ нема радијалне компоненте

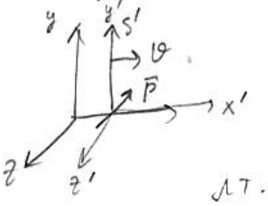
$$\boxed{\frac{mbv_b}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}} = -\frac{e}{2\pi}\Phi_B} \qquad \mathcal{E}(b) - \mathcal{E}(a) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}} - mc^2 = -eV \Rightarrow v_b = \ldots$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v_b^2/c^2}} - mc^2 = -eV \quad ; \quad 1-\frac{v_b^2}{c^2} = \left(\frac{mc^2}{mc^2-eV}\right)^2 \Rightarrow v_b = c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{mc^2-eV}\right)^2} = c\,\frac{\sqrt{-eV(2mc^2-eV)}}{mc^2-eV}$$

$$v_b = \frac{-eVc}{mc^2-eV}\sqrt{1-\frac{2mc^2}{eV}} \quad ; \qquad \Phi_B = -\frac{2\pi}{e}\frac{mbv_b}{\sqrt{1-v_b^2/c^2}} = -\frac{2\pi}{\cancel{e}}\frac{\cancel{m}b\,\cancel{(mc^2-eV)}}{\cancel{mc^2}}\frac{(-\cancel{e}Vc)}{\cancel{mc^2-eV}}\sqrt{1-\frac{2mc^2}{eV}}$$

$$\boxed{\Phi_B = \frac{2\pi Vb}{c}\sqrt{1-\frac{2mc^2}{eV}}}$$

Електрични диполни моменат $\vec{p}$ (у систему мировања) равномерно се креће брзином $\vec{v}$. Наћи скаларни и векторски потенцијал, као и електрично и магнетно поље.



у систему S' који се креће брзином $\vec{v}$:

$$\varphi'(\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}\,'}{r'^3}, \quad \vec{A}'(\vec{r}\,') = 0, \quad \vec{E}'(\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}\,')\vec{r}\,' - r'^2\vec{p}}{r'^5}, \quad \vec{B}'(\vec{r}\,') = 0$$

ЛТ. из S' у S: $\begin{pmatrix}\varphi/c\\ A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi'/c\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \gamma\varphi'(\vec{r}\,')$; $A_x = \beta\gamma\frac{\varphi'}{c} = \frac{v}{c^2}\gamma\varphi'$

$\boxed{\vec{r}\,' = \left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, y, z\right) = \gamma\vec{r}_*}$ (ЛТ. из S у S')

$$\varphi(\vec{r}) = \gamma\varphi'(\vec{r}\,') = \gamma\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}\,'}{r'^3} = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_*\,\gamma}{\gamma^3 r_*^3}$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_*}{\gamma r_*^3}} \quad ; \quad \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2}\gamma\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\gamma\vec{r}_*)}{\gamma^3 r_*^3} = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_*}{\gamma r_*^3}\vec{v}}$$

$$\vec{E}_\perp{}' = \frac{\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \; ; \; \vec{E}_\parallel{}' = \vec{E}_\parallel \rightarrow \vec{E}_\perp = \frac{\vec{E}_\perp{}' - \vec{v}\times\overset{0}{\vec{B}_\perp{}'}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\vec{E}_\perp{}' = \gamma(\vec{E}' - \vec{E}_\parallel{}') = \gamma\left(\vec{E}' - \frac{(\vec{E}'\vec{v})\vec{v}}{v^2}\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \underset{\vec{E}_\parallel{}'}{\underset{\parallel}{\vec{E}_\parallel}} = \gamma\left(\vec{E}' - \frac{(\vec{E}'\vec{v})\vec{v}}{v^2}\right) + \frac{\vec{E}'\vec{v}}{v^2}\vec{v} = \gamma\vec{E}' + (1-\gamma)\frac{(\vec{E}'\vec{v})\vec{v}}{v^2}$$

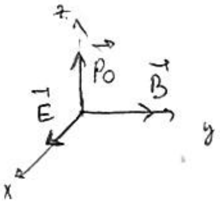
$$\vec{E}'(\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_*)\vec{r}_*\gamma^2 - r_*^2\gamma^2\vec{p}}{\gamma^5 r_*^5} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_*)\vec{r}_* - r_*^2\vec{p}}{\gamma^5 r_*^5}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\gamma(3\vec{p}\vec{r}_*)\vec{r}_* - \gamma r_*^2\vec{p}}{\gamma^5 r_*^5} + (1-\gamma)\frac{3(\vec{p}\vec{r}_*)\frac{(\vec{r}_*\vec{v})\vec{v}}{v^2} - r_*^2\frac{\vec{p}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}}{\gamma^5 r_*^5}\right]$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_*)\left(\gamma\vec{r}_* + (1-\gamma)\frac{(\vec{r}_*\vec{v})\vec{v}}{v^2}\right) - r_*^2\left(\gamma\vec{p} + (1-\gamma)\frac{(\vec{p}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2}\right)}{\gamma^5 r_*^5}}$$

$$\vec{B}_\perp{}' = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow \vec{B}_\perp = \frac{\overset{0}{\vec{B}_\perp{}'} + \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}_\perp{}'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\vec{v}}{c^2}\times\overbrace{(\gamma\vec{E}_\perp{}')}^{=\vec{E}_\perp} = \frac{\vec{v}}{c^2}\times(\vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel) = \boxed{\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}}$$

**) Честица масе m и наелектрисања q се креће у узајамно ортогоналним пољима $\vec{E} = E\vec{e}_x$ и $\vec{B} = B\vec{e}_y$, при чему је $E = cB$. У почетном тренутку честица се налазила у координатном почетку и имала је импулс $\vec{p}_0 = p_0\vec{e}_z$. Одредити $\vec{r}(\tau)$.
Ако у инерцијалном систему S' који се креће у односу на почетни систем S дуж x-осе, постоје компоненте електричног поља $E_z' = \frac{cB}{2}$, одредити кинетичку енергију честице у S' систему у функцији сопственог времена.



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$ Лоренцова сила

$$= qE\vec{e}_x + q(v_x\vec{e}_x + \cancel{v_y\vec{e}_y} + v_z\vec{e}_z)\times B\vec{e}_y = qE\vec{e}_x + qv_xB\vec{e}_z - qv_zB\vec{e}_x$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = (q\vec{E} + \underbrace{q\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}}_{0} = q\vec{E}\cdot\vec{v} \quad ; \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

x: $$\frac{dp_x}{dt} = qE - qB\dot{z} \Rightarrow p_x = qEt - qBz + \cancel{p_{0x}}^{0} \Rightarrow \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = qEt - qBz;$$

$$\boxed{p_x = m\frac{dx}{d\tau} = qEt - qBz} \quad *$$

y: $$\frac{dp_y}{dt} = 0 \quad ; \quad p_y = 0\,(= p_{y0}) \quad p_y = \frac{m\,dy}{d\tau} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

z: $$\frac{dp_z}{dt} = qB\dot{x} \to p_z = qBx + p_0 \quad ; \quad \boxed{m\frac{dz}{d\tau} = qBx + p_0} \quad **$$

$\mathcal{E}$: $$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = qE\vec{e}_x\cdot\vec{v} = qE\dot{x} \Rightarrow \mathcal{E} = qEx + \mathcal{E}_0 \quad ; \quad \boxed{\mathcal{E}_0^2 = m^2c^4 + c^2p_0^2}$$ ПОЧЕТНА ЕНЕРГИЈА

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc^2\,dt}{\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt} = \boxed{mc^2\frac{dt}{d\tau} = qEx + \mathcal{E}_0} \quad ***$$

Диференцирамо $*$ по τ: $m\frac{d^2x}{d\tau^2} = qE\frac{dt}{d\tau} - qB\frac{dz}{d\tau}$ и заменимо $\frac{dz}{d\tau}$ и $\frac{dt}{d\tau}$ из $**$ и $***$

$$m\frac{d^2x}{d\tau^2} = qE\,\frac{qEx + \mathcal{E}_0}{mc^2} - qB\,\frac{qBx + p_0}{m} \Rightarrow \frac{d^2x}{d\tau^2} + \cancel{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 x - \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 x} = \frac{qE\mathcal{E}_0}{m^2c^2} - \frac{qBp_0}{m^2}$$

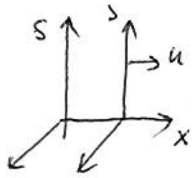
$E = cB$ по услову зад.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{qB}{mc}(\mathcal{E}_0 - p_0c) \Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = \frac{qB}{m^2c}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau + \cancel{\frac{p_x}{m}}^{0} \Rightarrow \boxed{x = \frac{qB}{2m^2c}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau^2}$$

у $**$ $$\frac{dz}{d\tau} = \frac{qB}{m}x + \frac{p_0}{m} = \frac{qB}{m}\left(\frac{qB}{2m^2c}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau^2\right) + \frac{p_0}{m} \Rightarrow \boxed{z = \frac{q^2B^2}{6m^3c}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau^3 + \frac{p_0}{m}\tau}$$

у $***$ $$\frac{dt}{d\tau} = \frac{qBc}{mc^2}x + \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} = \frac{qB}{mc}\,\frac{qB}{2m^2c}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau^2 + \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}$$

$$\boxed{t = \frac{q^2B^2}{6m^3c^2}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau^3 + \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\tau}$$



$E_z' = \frac{cB}{2}$

$\vec{E}_\parallel = E\vec{e}_x$; $\vec{E}_\perp = 0$ $\quad \vec{B}_\perp = B\vec{e}_y$, $\vec{B}_\parallel = 0$ (у систему S)

$\vec{E}_\parallel' = \vec{E}_\parallel$; $\vec{E}_\perp' = \frac{\vec{E}_\perp + \vec{u}\times\vec{B}_\perp}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ $\quad \vec{B}_\parallel' = \vec{B}_\parallel$; $\vec{B}_\perp' = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{u}\times\vec{E}_\perp}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ (у систему S')

$\vec{E}_\perp' = \frac{cB}{2}\vec{e}_z = \frac{u\vec{e}_x \times B\vec{e}_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{uB}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\vec{e}_z$; $\frac{c\cancel{B}}{2} = \frac{u\cancel{B}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

$\frac{4u^2}{c^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2}$ $\quad \frac{u}{c} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\boxed{u = \frac{c}{\sqrt{5}}}$

КВАДРИВЕКТОР ИМПУЛСА: $\begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{E}'/c \\ p_x' \\ p_y' \\ p_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}'}{c} = \gamma\frac{\mathcal{E}}{c} - \beta\gamma p_x$; $\mathcal{E}' = mc^2 + \underbrace{T'}_{}$

кинетичка енергија у систему S'

$T' = \gamma\mathcal{E} - \beta c\gamma p_x - mc^2$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$T' = \frac{\sqrt{5}}{2} mc^2 \frac{dt}{d\tau} - \frac{c}{\cancel{\sqrt{5}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{2}\cdot m\frac{dx}{d\tau} - mc^2 = \frac{\sqrt{5}}{2} mc^2\left(\frac{q^2B^2}{2m^3c^2}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau^2 + \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right) - \frac{\cancel{m}\cancel{c}}{2}\frac{qB}{\cancel{m^2}\cancel{c}}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau - mc^2$

$= \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{q^2B^2}{m^2\cdot 2}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\mathcal{E}_0 - \frac{qB}{2m}(\mathcal{E}_0 - p_0c)\tau - mc^2}$

Показати да лагранжијан $\tilde{L}=-\frac{1}{2}mu^{\mu}u_{\mu}-qA_{\mu}u^{\mu}$ даје коректне једначине кретања честице масе m и наелектрисања q у спољњем потенцијалу $A_{\mu}=A_{\mu}(x)$.

$$\tilde{L}=-\frac{1}{2}mu^{\mu}u_{\mu}-qA_{\mu}u^{\mu}$$

Ојлер-Лагранжеве јне $\quad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x^{\mu}}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial u^{\mu}}=0 \qquad u^{\mu}\overset{\text{def}}{=}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x^{\mu}}=-q\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}u^{\nu}=-q\partial_{\mu}A_{\nu}\cdot u^{\nu}, \qquad \partial_{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial u^{\mu}}=-mu_{\mu}-qA_{\mu} \quad ; \quad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial u^{\mu}}=-m\frac{du_{\mu}}{d\tau}-q\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\cdot\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=-m\frac{du_{\mu}}{d\tau}-q\partial_{\nu}A_{\mu}u^{\nu}$$

$$-m\frac{du_{\mu}}{d\tau}-q\partial_{\nu}A_{\mu}u^{\nu}+q\partial_{\mu}A_{\nu}u^{\nu}=0 \Rightarrow m\frac{du_{\mu}}{d\tau}=q(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu})u^{\nu}$$

$p_{\mu}=mu_{\mu} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{d\tau}p_{\mu}=qF_{\mu\nu}u^{\nu}}$ Једначина кретања наелектрисане честице у ЕМ пољу

Релативистичка честица масе m и наелектрисања q налази се у спољњем константном електричном пољу $\vec{E}=E\vec{e}_x$. Ако се за потенцијал узме $A^{\mu}=(0,-Et,0,0)$ одредити дејство и једначине кретања.

$$S=-mc\int ds-q\int A_{\mu}dx^{\mu}=-mc\int\sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}-q\int A_{\mu}dx^{\mu}$$

τ - сопствено време ; $u^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$

$$S=\int\left(-mc\sqrt{u^{\mu}u_{\mu}}-qA_{\mu}u^{\mu}\right)d\tau$$

$x^{\mu}=(ct,x,y,z) \quad u^{\mu}=(c\dot{t},\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \quad \dot{\ }$ - извод по τ

$$A_{\mu}u^{\mu}=A_1u^1=-A^1u^1=Et\dot{x}$$

$$S=\int\left(-mc\sqrt{c^2\dot{t}^2-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2}-qEt\dot{x}\right)d\tau=\int\tilde{L}\,d\tau \ ; \ \tilde{L}=\tilde{L}(t,\dot{t},\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

координате су t,x,y,z

t: $\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{t}}=0 \quad ; \quad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial t}=-qE\dot{x} \quad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{t}}=\frac{-mc}{2\underbrace{\sqrt{c^2\dot{t}^2-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2}}_{c}}\cdot 2c^2\dot{t}=-mc^2\dot{t}$

$$\sqrt{c^2\dot{t}^2-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2}=\sqrt{c^2\gamma^2-v_x^2\gamma^2-v_y^2\gamma^2-v_z^2\gamma^2}=c\gamma\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=c$$

$-qE\dot{x}+mc^2\ddot{t}=0 \qquad mc^2\dot{t}=\mathcal{E}=mc^2\gamma \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{d\tau}=qE\frac{dx}{d\tau} \Rightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt}=qEv_x} \ \mathcal{E}=qEx+\mathcal{E}$

x: $\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{x}}=\frac{-mc}{\cancel{2}\cancel{c}}\cdot(-\cancel{2}\dot{x})-qEt=p_x-qEt \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(p_x-qEt)=0 \Rightarrow \boxed{p_x=qEt+p_{0x}}$

y: $\frac{\partial\tilde{L}}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{y}}=-\frac{mc}{2c}(-2\dot{y})=p_y \Rightarrow \frac{dp_y}{d\tau}=0 \Rightarrow \boxed{p_y=p_{0y}}$

z: $\frac{\partial\tilde{L}}{\partial z}=0 \quad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{z}}=p_z \Rightarrow \frac{dp_z}{d\tau}=0 \Rightarrow \boxed{p_z=p_{0z}}$

Тензор енергије-импулса ЕМ поља се може дефинисати помоћу тензора јачине поља као:

$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\rho}F_\rho{}^{\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$. а) Наћи компоненте овог тензора, б) Показати да је $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$,

в) Показати да је $g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = T_\alpha{}^\alpha = 0$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ ; \quad F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_0 A^i - \partial_i \frac{\varphi}{c} = \frac{E_i}{c} \ ; \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i$$

$$F_{ij} = -\varepsilon_{klm}\,\varepsilon_{kij}\,\partial_l A^m = -\varepsilon_{kij}B_k \ ; \quad \text{значи} \quad \boxed{F_{0i} = \frac{E_i}{c}\,,\ F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k}$$

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij} = 2F_{0i}^2 + (F_{ij})^2 = -2\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}}_{2\delta_{kl}}B_kB_l = \frac{-2\vec{E}^2}{c^2} + 2\vec{B}^2$$

$$\mu_0 T^{00} = F^{0i}F_i{}^0 + \frac{1}{4}\left(\frac{-2\vec{E}^2}{c^2} + 2\vec{B}^2\right) = \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \frac{1}{2}\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \frac{1}{2}\vec{B}^2 = \frac{1}{2}\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \frac{1}{2}\vec{B}^2$$

$$T^{00} = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = w_{EM} \ \text{- густина енергије ЕМ поља}$$

$$T^{0i} = \frac{1}{\mu_0}F^{0j}F_j{}^i = -\frac{1}{\mu_0}F_{0j}F_{ij} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{E_j}{c}(-\varepsilon_{ijk}B_k) = \frac{1}{\mu_0 c}(\vec{E}\times\vec{B})_i = \frac{1}{c}S_{Pi}$$

i-та компон. Поинт. вектора

$$T^{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{i0}F_0{}^j + F^{ik}F_k{}^j + \frac{1}{4}g^{ij}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(-F_{0i}F_{0j} + F_{ik}F_{jk} - \frac{1}{4}\delta_{ij}\,2\left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{E_iE_j}{c^2} + \varepsilon_{ikl}B_l\,\varepsilon_{jkm}B_m - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{E_iE_j}{c^2} + \delta_{ij}\vec{B}^2 - B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)\right) = -\varepsilon_0E_iE_j - \frac{1}{\mu_0}B_iB_j + \delta_{ij}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2\right) = -T_{M\,ij}$$

$$T^{\mu\nu} = \begin{array}{|c|c|} w_{EM} & \frac{1}{c}\vec{S}_P \\ \hline \frac{\vec{S}_P}{c} & -\hat{T}_M \end{array}$$

б) $$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\underbrace{\partial_\mu F^{\mu\rho}}_{\mu_0 j^\rho}F_\rho{}^\nu + F^{\mu\rho}\partial_\mu F_\rho{}^\nu + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta}\right)$$

$$= \underbrace{j^\rho}_{\to 0}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{2\mu_0}\left(F^{\mu\rho}\partial_\mu F_\rho{}^\nu - F^{\mu\rho}\partial_\rho F_\mu{}^\nu + F^{\mu\rho}\partial^\nu F_{\mu\rho}\right)$$

за слободно поље

$$= \frac{1}{2\mu_0}F^{\mu\rho}\underbrace{\left(\partial_\mu F_\rho{}^\nu + \partial_\rho F^\nu{}_\mu + \partial^\nu F_{\mu\rho}\right)}_{=0 \text{ Бјанкијев идентитет}} + j^\rho F_\rho{}^\nu = j^\rho F_\rho{}^\nu = 0 \quad \text{нема извора}$$

в) $$g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0}\left(g_{\alpha\beta}F^{\alpha\rho}F_\rho{}^\beta + \frac{1}{4}\underbrace{g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}}_{4}\cdot F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\alpha\rho}\underbrace{F_{\rho\alpha}}_{-F_{\alpha\rho}} + F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = 0$$

Показати да је $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(\vec B^2 - \frac{1}{c^2}\vec E^2\right)$ и $-\frac{c}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \vec E\cdot\vec B$

• $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}$; $\boxed{F^{0i} = -\frac{E_i}{c}, \quad F^{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k}$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\frac{E_i}{c}\left(-\frac{E_i}{c}\right) + \varepsilon_{ijk}B_k\varepsilon_{ijl}B_l = -\frac{2}{c^2}\vec E^2 + 2\vec B^2$$

• $-\frac{c}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -\frac{c}{8}\left(\varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk} + \varepsilon^{i0jk}F_{i0}F_{jk} + \varepsilon^{ij0k}F_{ij}F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}F_{ij}F_{k0}\right)$

$$= -\frac{c}{8}\varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk}\cdot 4 = -\frac{\cancel{c}}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{E_i}{\cancel{c}}\left(-\varepsilon_{jkl}B_l\right) = \frac{1}{2}2\delta_{il}E_iB_l = \vec E\cdot\vec B.$$

Ако је $T^{\mu\nu}$ тензор енергије-импулса показати да се једна $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$ за слободно ЕМ поље своди на Поинтингову теорему и теорему импулса.

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ $\quad \boxed{T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}}$! $\quad T^{00} = w$; $T^{0i} = \frac{1}{c}S_{Pi} = c g_i$; $T^{ij} = -(\hat T_M)_{ij}$

$\nu = 0$: $\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = \frac{\partial}{\partial(ct)}w + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^i}(S_{Pi}) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\vec S_P\right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\vec S_P = 0}$ $\;/\int d^3\vec x \;\rightarrow\; \boxed{\frac{d}{dt}\left(\int w\,d^3\vec x\right) + \oint \vec S_P\, d\vec S = 0}$ Нема наел. честица

$\nu = i$: $\partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ji} = \frac{1}{\cancel{c}}\frac{\partial}{\partial t}(\cancel{c}g_i) + \partial_j(-\hat T_M)_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial t} - \partial_j(\hat T_M)_{ij} = 0 \;/\int d^3x\,\vec e_i$

$$\frac{d}{dt}\int \vec g\,d^3x - \int d^3\vec x\,\partial_j(\hat T_M)_{ij}\vec e_i = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int \vec g\,d^3\vec x - \oint dS_j\,T_{Mij}\vec e_i = \frac{d}{dt}\left(\int \vec g\,d^3\vec x\right) - \oint \hat T_M\,d\vec S = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\int \vec g\,d^3\vec x = \oint \hat T_M\,d\vec S}$$

Израчунати $F_{\mu\nu}j^\nu$ преко $\vec E, \vec B, \rho$ и $\vec j$. $\quad F^{0i} = -\frac{1}{c}E^i$; $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k$

$C_\mu = F_{\mu\nu}j^\nu = F_{\mu 0}j^0 + F_{\mu k}j^k$

за $\mu = 0$: $C_\mu = C_0 = \cancel{F_{00}j^0} + F_{0k}j^k = \frac{1}{c}E^kj^k = \frac{1}{c}\vec E\cdot\vec j = \frac{1}{c}\vec f\cdot\vec v$ густина снаге

за $\mu = i$: $C_\mu = C_i = F_{i0}j^0 + F_{ik}j^k = -\frac{1}{\cancel{c}}E^i\rho\cancel{c} + (-\varepsilon_{ikl}B^l)j^k$

$= -\rho E^i - (\vec j\times\vec B)^i = -f^i$ компонента Лоренцове силе

$$C^\mu = \left(\frac{\vec f\,\vec v}{c}, \vec f\right)$$

На слици је приказано поједностављено електронско сочиво. Оно се састоји од кружног проводника са струјом I. За $\rho \ll a$ векторски потенцијал је приближно $A_\theta = \dfrac{\pi I a^2 \rho}{(a^2+z^2)^{3/2}}$

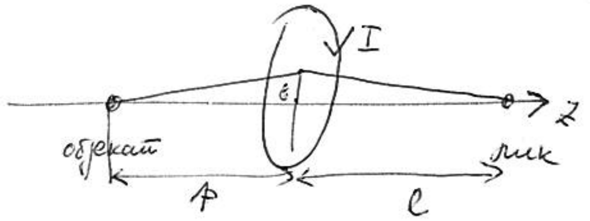
а) Написати Лагранжијан и Хамилтонијан у цилиндричним координатама (ρ, θ, z) за наелектрисање q које се креће у овом пољу.

б) Показати да канонски импулс P_θ ишчезава за трајекторију са слике и наћи израз за $\dot{\theta}$.

У следећа два дела задатка претпоставићемо да је магнетна сила на наелектрисање најзначајнија у близини сочива (импулсна апроксимација). Пошто је ρ мало претпоставићемо да је $\rho \approx b$ и да је $\dot{z} \approx u$ скоро константно.

в) Израчунати радијалну промену импулса када честица пролази кроз сочиво. Показати да контура делује као сочиво, тј. да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$ где f треба одредити.

г) Показати да се лик заротира за угао $\Delta\theta = -4\sqrt{\frac{2a}{3\pi f}}$ при проласку кроз сочиво.



$A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$

$$V = q A^\mu \frac{dx_\mu}{dt} = q \frac{\varphi}{c} c - q\vec{A}\vec{v} = \boxed{q\varphi - q\vec{A}\vec{v}}$$

а) $$L = T - V = \frac{mv^2}{2} - \underbrace{(q\overset{\to 0}{\varphi} - q\vec{v}\vec{A})}_{\text{потенцијал у ЕМ пољу}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + q\rho\dot{\theta}\frac{\pi I a^2 \rho}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\pi I a^2 q \rho^2 \dot{\theta}}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

ген. импулси:

$$P_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{P_\rho}{m} \quad ; \quad P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} + \frac{\pi I a^2 q \rho^2}{(a^2+\rho^2)^{3/2}} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m\rho^2} - \frac{\pi I a^2 q}{m(a^2+\rho^2)^{3/2}}$$

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{P_z}{m}$$

$$H = H(P_\rho, P_\theta, P_z, \rho, \theta, z) = P_\rho\dot{\rho} + P_\theta\dot{\theta} + P_z\dot{z} - L = \frac{P_\rho^2}{m} + \frac{P_\theta^2}{m\rho^2} - \frac{\pi I a^2 q P_\theta}{m(a^2+z^2)^{3/2}} + \frac{P_z^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{P_\rho^2}{m^2} + \rho^2\left(\frac{P_\theta}{m\rho^2} - \frac{\pi I a^2 q}{m(a^2+z^2)^{3/2}}\right)^2 + \frac{P_z^2}{m^2}\right) - \frac{\pi I a^2 q \rho^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\left(\frac{P_\theta}{m\rho^2} - \frac{\pi I a^2 q}{m(a^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} + \frac{p_z^2}{2m} - \cancel{\frac{\pi I a^2 q\, p_\theta}{m(a^2+z^2)^{3/2}}} + \cancel{\frac{m}{2}\rho^2\, 2\frac{p_\theta}{m\rho^2}\frac{\pi I a^2 q}{m(a^2+z^2)^{3/2}}} - \frac{m}{2}\rho^2\frac{\pi^2 I^2 a^4 q^2}{m^2(a^2+z^2)^3} - \frac{\pi I a^2 q}{(a^2+z^2)^{3/2}}\frac{p_\theta}{m} + \frac{\pi^2 I^2 a^4 q^2 \rho^2}{m(a^2+z^2)^3}$$

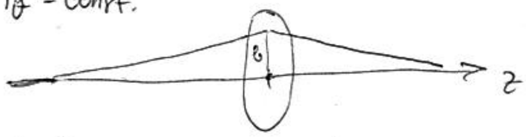
$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{\pi I a^2 q}{(a^2+z^2)^{3/2}}\frac{p_\theta}{m} + \frac{\pi^2 I^2 a^4 q^2 \rho^2}{2m(a^2+z^2)^3}$$

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\theta - \frac{\pi I a^2 q \rho^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}\ ; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

б) Хамилтонова ј-на : $\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p_\theta = \mathrm{const.}$

$$p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} + \frac{\pi I a^2 q \rho^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \mathrm{const}$$



далеко од контуре $\rho \approx 0$ $\quad \dot{\theta} = 0$ (брзина дуж z правца) $\Rightarrow \boxed{p_\theta = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -\frac{\pi I a^2 q}{m(a^2+z^2)^{3/2}}}$$

в) Хамилтонова ј-на: $\dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\pi^2 I^2 a^4 q^2 \rho^2}{2m(a^2+z^2)^3}\right) = -\frac{\pi^2 I^2 a^4 q^2 \rho}{m(a^2+z^2)^3}$ (јер $p_\theta \equiv 0$)

$$\Rightarrow \quad dp_\rho = -\frac{\pi^2 I^2 a^4 q^2 \rho}{m(a^2+z^2)^3}\frac{1}{\dot{z}}\,dz$$

$\rho \approx b$; $\dot{z} \approx u$ па интегралимо од $z = -\infty$ до $z = +\infty$

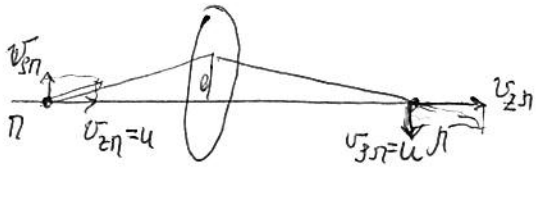
$$\Delta p_\rho = -\frac{\pi^2 I^2 a^4 q^2 b}{mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(a^2+z^2)^3}$$

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad J_n = \cancel{\frac{x}{(1+x^2)^n}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}^{\,0} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(-n)\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,2x\,dx = 2n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$J_n = 2n(J_n - J_{n+1}) \Rightarrow \quad J_{n+1} = J_n - \frac{1}{2n}J_n = \frac{2n-1}{2n}J_n$$

$$J_3 = \frac{3}{4}J_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}J_1\ ; \quad J_1 = \mathrm{arctg}\,x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi \quad ; \ J_3 = \frac{3}{8}\pi$$

$$\Delta p_\rho = -\frac{\pi^2 I^2 a^4 q^2 b}{mu\,a^6}J_3 = \boxed{-\frac{3\pi^3 I^2 q^2 b}{8mua}}$$



$$\frac{v_{\rho\Pi}}{u} = \frac{b}{p} \quad ; \quad \frac{-v_{\rho\Lambda}}{u} = \frac{b}{l}$$

$$\Rightarrow \quad b\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{u}\left(\dot{\rho}_\Pi - \dot{\rho}_\Lambda\right) = \frac{1}{um}\left(p_{\rho\Pi} - p_{\rho\Lambda}\right) = \frac{1}{um}(-\Delta p_\rho)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{bum}(-\Delta p_\rho) = \frac{1}{\cancel{b}um}\left(+\frac{3\pi^3 I^2 q^2 \cancel{b}}{8mua}\right) = \frac{3\pi^3 I^2 q^2}{8m^2u^2a} = \frac{1}{f}$$

$$\boxed{f = \frac{8m^2u^2a}{3\pi^3 I^2 q^2}}$$

g) $\dot{\theta} = -\dfrac{\pi I a^2 q}{m(a^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow d\theta = -\dfrac{\pi I a^2 q}{m(a^2+z^2)^{3/2}} \dfrac{1}{\dot{z}} dz \approx \dfrac{-\pi I a^2 q}{mu(a^2+z^2)^{3/2}} dz$

$$\Delta\theta = -\frac{\pi I a^2 q}{mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\pi I a^2 q}{mu\, a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = -\frac{2\pi I a^2 q}{mu\, a^2}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} + C \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = 2$$

$$\Delta\theta = -\frac{2\pi I q}{mu} \qquad f = \frac{8a(mu)^2}{3\pi(\pi I q)^2} \Rightarrow \left(\frac{\pi I q}{mu}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{3\pi f}{8a}}$$

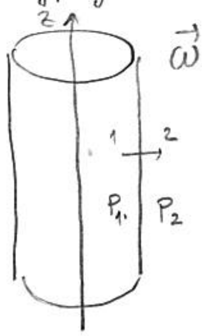
$$\Delta\theta = -2\sqrt{\frac{8a}{3\pi f}} = \boxed{-4\sqrt{\frac{2a}{3\pi f}}}$$

Дугачак ваљак радијуса R ротира око осе симетрије константном угаоном брзином $\vec{\omega}=\omega\vec{e}_z$. Поларизација у ваљку је дата са $\vec{P}=ar_c\vec{e}_{r_c}$, где је $a=const.$

а) Наћи расподелу везаних наелектрисања па на основу тога наћи расподелу везаних струја.

б) Наћи густину везаних струја применом закона трансформације за векторе $\vec{P}$ и $\vec{M}$

в) одредити $\vec{B}$.



$\vec{\omega}=\omega\vec{e}_z$

а) $\operatorname{div}\vec{P}=-\rho_{vez}$

$$\rho_{vez}=-\operatorname{div}\vec{P}=-\frac{1}{r_c}\frac{\partial}{\partial r_c}(r_c\cdot ar_c)=\boxed{-2a}$$

$$P_{1n}-\underbrace{\cancel{P_{2n}}}_{0}\Big|_{гр}=-\sigma_{vez}\quad;\quad \sigma_{vez}=-P_{1r_c}\Big|_{гр}=+\boxed{aR}$$

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\omega\vec{e}_z\times(r_c\vec{e}_{r_c}+\underbrace{\cancel{z\vec{e}_z}}_{0})=\omega r_c\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{J}_{vez}=\rho_{vez}\cdot\vec{v}=\boxed{-2a\omega r_c\vec{e}_\varphi}$$

$$\vec{i}_{vez}=\sigma_{vez}\cdot\vec{v}=aR\omega R\,\vec{e}_\varphi=\boxed{a\omega R^2\vec{e}_\varphi}$$

б) лабораторијски систем S

систем који ротира угаоном брзином S' – креће се брзином $\vec{v}=\omega r_c\vec{e}_\varphi$ у односу на S у тачки $\vec{r}$. (локални инерцијални систем)

У S: $\vec{P}=ar_c\vec{e}_{r_c}$

у S': $\vec{P}'_{\parallel}=\vec{P}_{\parallel}$; $\vec{M}'_{\parallel}=\vec{M}_{\parallel}=0$; $\vec{P}'_{\perp}=\dfrac{\vec{P}_\perp-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{M}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\quad\vec{M}'_\perp=\dfrac{\vec{M}_\perp+\vec{v}\times\vec{P}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

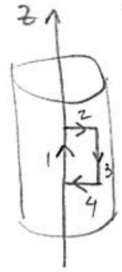
у S' је $\vec{M}'=0$ мирују наелектрисања $\Rightarrow$ $\vec{M}'_\perp=0=\dfrac{\vec{M}_\perp+\vec{v}\times\vec{P}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=0$

$\Rightarrow$ $\vec{M}_\perp=-\vec{v}\times\vec{P}=-\omega r_c\vec{e}_\varphi\times ar_c\vec{e}_{r_c}=\boxed{a\omega r_c^2\vec{e}_z=\vec{M}}$ нашли смо $\vec{M}$ у лаб. сист.

у S: $\vec{J}_{vez}=\operatorname{rot}\vec{M}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}}}_{0}=\operatorname{rot}(a\omega r_c^2\vec{e}_z)=-\dfrac{\partial}{\partial r_c}(a\omega r_c^2)\vec{e}_\varphi=\boxed{-2a\omega r_c\vec{e}_\varphi}$

$\vec{i}_{vez}=\vec{n}\times(\underbrace{\cancel{\vec{M}_2}}_{0}-\vec{M}_1)\Big|_{гр}=-\vec{e}_{r_c}\times a\omega r_c^2\vec{e}_z\Big|_{гр}=\boxed{a\omega R^2\vec{e}_\varphi}$

в)



$\vec{B}=B(r_c)\vec{e}_z$; $\operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{J}=\mu_0\vec{J}_{vez}=-2\mu_0 a\omega r_c\vec{e}_\varphi$

$\int\operatorname{rot}\vec{B}\,d\vec{S}=\int\mu_0\vec{J}_{vez}\,d\vec{S}$ $\qquad d\vec{S}=dz\,dr_c\,\vec{e}_\varphi$

$\oint\vec{B}\,d\vec{l}=\int\vec{B}\,d\vec{l}=-B(r_c)\cdot dz=\int_0^{r_c}-2\mu_0 a\omega r_c\,dz\,dr_c$

$\cancel{-}B(r_c)\cancel{dz}=\cancel{-}\cancel{2}\mu_0 a\omega\,\cancel{dz}\cdot\dfrac{r_c^2}{\cancel{2}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}=\mu_0 a\omega r_c^2\vec{e}_z}$